УДК 519.711; 621.313
В.В. Лишук, М.М. Євсюк
Луцький національний технічний університет
v.lyshuk@lntu.edu.ua

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОДНОФАЗНОГО ТРАНСФОРМАТОРА ЯК ЕЛЕМЕНТА СИСТЕМ АВТОМАТИКИ

У статті пропонуються особливості побудови математичної моделі електротехнічного пристрою на прикладі однофазного трансформатора. Її відмінність від традиційних моделей полягає в тому, що диференціальні рівняння електромагнітного стану відносять до методів часової області, а також у поданні цих рівнянь в нормальній формі Коші, що усуває операцію числового обертання матриці коефіцієнтів на кожному кроці інтегрування. Рівняння дають змогу описати такі складні процеси як насичення сталі магнітопроводу та врахування потоків розсіяння. Саме так можна побудувати адекватні фізичному процесу математичні моделі, які оперують реальними фізичними величинами.
Ключові слова: математична модель, диференціальні рівняння, однофазний трансформатор.

V.V. Lyshuk, M.M. Yevsiuk. Mathematical model of one-phase transformer as an element of automation systems. The features of construction of mathematical model of electrical devices on the example of a single-phase transformer are offered in the article. Their difference from the traditional models is that the differential equations of the electromagnetic state refer to the methods of the time domain, as well as the representation of these equations in the normal Cauchy form, which eliminates the operation of numerical rotation of the coefficient matrix at each step of integration. The equations make it possible to describe such complex processes as the saturation of the magnetic core and the scattering fluxes. This is how mathematical models that operate on real physical quantities, adequate to the physical process, can be constructed.
Keywords: mathematical model, differential equations, one-phase transformer.

В. В. Лышук, Н.Н. Евсюк. Математическая модель однофазного трансформатора как элемента систем автоматики. В статье предлагаются особенности построения математической модели электротехнического устройства на примере однофазного трансформатора. Их отличие от традиционных заключается в том, что дифференциальные уравнения электромагнитного состояния относят к методам временной области, а также в представлении этих уравнений в нормальной форме Коши, что устраняет операцию численного оборачивания матрицы коэффициентов на каждом шаге интегрирования. Уравнения позволяют описать такие сложные процессы как насыщение стали магнитопровода и учета потоков рассеяния. Именно так можно строить адекватные физическому процессу математические модели, которые оперируют реальными физическими величинами.
Ключевые слова: математическая модель, дифференциальные уравнения, однофазный трансформатор.

Постановка проблеми. На сьогодні математичне моделювання є потужним інструментом при досліджені та аналізі різних фізичних процесів. Значний інтерес тут представляють електромагнітні процеси. Моделювання дає змогу замінити дороговартісні експерименти і тим самим отримати інформацію про стан роботи електротехнічних пристроїв. Тобто, завдяки моделюванню можна розрахувати різноманітні перехідні процеси, здійснити їх аналіз, порівняти з осцилограмами та зробити висновки щодо роботи пристрою в тих чи інших станах (наприклад, аварійних).

Як відомо, традиційні методи електротехніки не здатні розв'язати задачі розрахунку перехідних процесів у електротехнічних пристроях. Перші спроби інтегрування рівнянь електромагнітного стану здійснювалися аналітичними методами. Труднощі такого розв'язання задач загальновідомі, оскільки заступні схеми елементів будуються для усталених станів [1].

Розробка методів аналізу електротехнічних пристроїв є визначальним в технічному поступі і належить до приорітетних задач загальної теорії електротехніки. Аналіз таких пристроїв немислимий без створення їх сучасних математичних моделей [5, 6].

Диференціальні рівняння традиційних моделей мають неявну форму, тому при чисельній реалізації у випадку довготривалих процесів обертання матриці коефіцієнтів призводить до суттє-

вих затрат комп'ютерного часу і накопичення похибок в процесі інтегрування. У поданій роботі диференціальні рівняння електромагнітного стану є записаними в нормальній формі Коші, що є вкрай необхідною для точного аналізу електротехнічних пристроїв. У таких пристроях складність фізичного процесу може бути зумовлена наявністю великої кількості електричних та магнітних контурів, взаємними індуктивними зв'язками між нерухомими контурами, насиченням шляхів магнітних потоків тощо [1, 2, 4].

Відомі інженерні методи, побудовані на основі заступних колових електричних схем, на сьогоднішній час не дають змоги отримати з достатньою точністю інформацію про струми та напруги трансформатора. Для відображення реальної фізичної картини запропоновано модель на основі фундаментальних законів електротехніки [3], [5].

Аналіз показує, що вдосконалити моделі можна шляхом їх орієнтації на використання прийнятних числових методів, зокрема явного інтегрування. А це можна зробити лише за відмови від традиційних підходів на користь нових. Це перш за все стосується переходу від використання методів теорії електричних кіл до методів електромагнітних кіл [6], [8].

Основна частина. В електротехніці значний інтерес становлять задачі, в яких до числа невідомих одночасно належать і магнітні і електричні величини.

Нехай до обмотки прикладається синусоїдна напруга. Як відомо рівняння електричного кола мають вигляд [8]

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = U_i - R_i I_i, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

де Ψ, r, i – повне потокозчеплення, опір та струм обмоток.

Повне потокозчеплення представимо як суму основного потокозчеплення та потокозчеплення розсіяння

$$\Psi_i = w_i \Phi + L_i I_i, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Потокозчеплення розсіяння частково або повністю замикаються по повітрю, тому індуктивність розсіяння $L_i = const$.

Розв'язавши (2) відносно струму, отримаємо

$$I_i = \alpha_i \left(\Psi_i - w_i \Phi \right), \tag{3}$$

де $\alpha_i = 1/L_i$ – обернена індуктивність розсіяння обмотки, Ф – магнітний потік, w – кількість витків обмоток.

Запишемо рівняння електромагнітного кола, в якому пов'язані і електричні і магнітні величини [8]

$$V + \sum_{i=1}^{n} V_i(\Phi) + \left(\sum_{i=1}^{m} \rho_i + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i w_i^2 \right) \Phi - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i w_i \Psi_i = 0. \tag{4}$$

Або

$$V + \rho_м \Phi - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i w_i \Psi_i = 0. \tag{5}$$

Тут V – магнітна напруга, ρ – диференціальний магнітний опір, що визначається з характеристики намагнічування сталі магнітопроводу $V = f(\Phi)$ або з характеристики $B = f(H)$ з перерахуванням масштабу.

$$\rho_м = \sum_{i=1}^{m} \rho_i'' + \sum_{i=1}^{m} \rho_i + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i w_i^2. \tag{6}$$

Продиференціювавши (4) за часом, отримаємо

$$\frac{dV}{dt} = T - \rho_м \frac{d\Phi}{dt}. \tag{7}$$

Тут T – активна дія обмотки

$$T = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i w_i \frac{d\Psi_i}{dt}. \tag{8}$$

Диференціальне рівняння (7) записане для магнітних кіл в загальному випадку.

У випадку трансформатора магнітні напруги $V = 0$. Це пов'язано з тим, що магнітопровід трансформатора замкнений і через нього замикається один і той же магнітний потік. Тоді рівняння (7) набуває вигляду

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{T}{\rho_м}. \tag{9}$$

Зауважимо, що в рівнянні (6) перший доданок зникає ($V = 0$), а активна дія вітки врахувавши (1) набуває вигляду

$$T = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i w_i \left(U_i - R_i I_i\right). \tag{10}$$

Диференціальні рівняння електричних контурів трансформатора запишемо з урахуванням (9)

$$\frac{di_i}{dt} = \alpha_i \left(U_i - R_i I_i - w_i \frac{d\Phi}{dt} \right) = \alpha_i \left(U_i - R_i I_i - w_i \frac{T}{\rho_м} \right), \qquad i = 1, 2. \tag{11}$$

Вирази (9), (11) утворюють повну систему нелінійних диференціальних рівнянь однофазного двообмоткового трансформатора, записаних в нормальній формі Коші. Така форма суттєво спрощує чисельне інтегрування, завдяки застосуванню явних методів і підвищує точність розрахунку та економить час розрахунку. Для реалізації моделі на комп'ютері необхідно мати вхідні дані, а саме: первинну напругу, активні та індуктивні опори обмоток, характеристику вітки намагнічування. Відмітимо, що традиційні методи, що ґрунтуються на теорії нелінійних електричних кіл, позбавлені можливості запису в нормальній формі Коші. І це вимагає застосування для розв'язання диференціальних рівнянь складніших в реалізації неявних методів. Ця складність полягає в тому, що на кожному кроці інтегрування потрібно обертати матрицю диференціальних індуктивностей обмоток трансформатора і віднімати два близьких за значенням основного потокозчеплення та потокозчеплення розсіяння, що впливатиме на час і точність розрахунку.

Висновки. Підсумовуючи, можемо констатувати, що найбільш перспективним напрямком математичного моделювання на сьогодні є поєднання методів теорій електричних і магнітних кіл, що базуються на загальних засадах теорії нелінійних диференціальних рівнянь та нелінійної електротехніки, тобто методах часової області. Розроблена модель однофазного двообмоткового трансформатора на основі диференціальних рівнянь електромагнітного стану дає змогу розраховувати в ньому різноманітні перехідні процеси, його статичні та диференціальні параметри.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ:

1. Гумен М. В. Основи теорії електричних кіл. Аналіз нелінійних електричних кіл. 3-тя книга / М. В. Гумен, А. М. Гурій, В. М. Співак, Ю. Г. Савченко. – К. : Вища школа, 2004. – 391 с.
2. Копылов И. П. Электрические машины / И. П. Копылов. – М. : Высшая школа, 2004. – 607 с.
3. Лишук В.В. Сучасний стан математичного моделювання електротехнічних пристроїв / В.В. Лишук // Наукові нотатки. Вип. 38. м. Луцьк, 2012. – С.111-115.
4. Маляр В. Апроксимація характеристик намагнічування електротехнічних сталей / В. Маляр, А. Маляр, Д. Гречин // Теоретична електротехніка. – 2004. – № 57. – С. 78 – 86.
5. Чабан В. Найпростіші математичні моделі насиченого трифазного трансформатора / В. Чабан, В. Лишук // Електроінформ, – №3, 2007, с.14–15.
6. Чабан В.Й. Математичне моделювання електромеханічних процесів / В.Й. Чабан. – Львів : В-во Держуніверситету „Львівська політехніка", 1997. – 342 с.
7. Чабан В. Чисельні методи / В. Чабан. – Львів: В-во Нац. у-ту „Львівська політехніка", 2001. – 186 с.
8. Чабан В.Й. Математичне моделювання електромагнітних процесів / В. Й. Чабан. – К. : НМК ВО, 1992. – 391 с.